Leçon 215 : Applications différentiables sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Exemples et applications

Références : Gourdon, Rouvière, (Tauvel ...), Li Intégration (pour chgmt de var.)

I - Différentiabilité

1) Définitions et premières propriétés

2) Dérivées directionnelles et dérivées partielles

3) Différentielle d'ordre supérieur

II - Théorèmes fondamentaux

1) Théorèmes d'inversion

2) Théorème des fonctions implicites

3) Extrema

III - Exemples et applications

1) Calcul différentiel dans les espaces de matrices

2) Quelques propriétés sur les fonctions holomorphes et harmoniques

3) Applications aux intégrales

DEV 1 : Théorème d'inversion locale

DEV 2 : Différentielle du déterminant et éléments de $SL_n(\mathbb{R})$ de norme minimale.

Leçon 215 : Applications différentiables définies sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Exemples et applications

Soient E, F deux espaces vectoriels normés de dimensions finies n et p, $U \subset E$ un ouvert et $f : U \to F$.

I - Différentiabilité

1) Définition et premières propriétés [GOU]

DEF 1 : On dit que f est différentiable en $a \in U$ lorsqu'il existe $\varphi \in \mathcal{L}_c(E,F)$ telle que $f(a+h) = f(a) + \varphi(h) + \underset{h\to 0}{o}(\|h\|)$.
Autrement dit, $\frac{\|f(a+h) - f(a) - \varphi(h)\|_F}{\|h\|_E} \xrightarrow[h \to 0]{} 0$

PROP 2 : Si φ existe, elle est unique et s'appelle la différentielle de f en a. On la note $df(a)$.

DEF 3 : On dit que f est différentiable sur U lorsque f est différentiable en tout point a de U. L'application $df : \begin{array}{l} U \to \mathcal{L}_c(E,F) \\ a \mapsto df(a) \end{array}$ est appelée application différentielle de f. Si df est continue, on dit que f est de classe $\mathcal{C}^1$.

Exos !

EX 4 : • Si $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, alors $\forall a \in I, \forall h \in \mathbb{R}$, $df(a)(h) = f'(a)h$.
• Si f est linéaire, alors $\forall a \in U$, $df(a) = f$.
• Si f est bilinéaire de $E_1 \times E_2$ dans F, alors f est différentiable : $df(u,v)(h,k) = f(u,k) + f(h,v)$.

EX 5 : • Soit $p \in \mathbb{N}^*$. L'application $\varphi_p : \begin{array}{l} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ M \mapsto M^p \end{array}$ est différentiable et $d\varphi_p(M)(H) = \sum_{i=0}^{p} M^i H M^{p-1-i}$
• L'application $\mathrm{Inv} : \begin{array}{l} GL_n(\mathbb{R}) \to GL_n(\mathbb{R}) \\ M \mapsto M^{-1} \end{array}$ est différentiable et $d\mathrm{Inv}(M)(H) = -M^{-1}HM^{-1}$.

PROP 6 : Une fonction différentiable en un point est continue en ce point.

PROP 7 : Si f, g sont différentiables en $a \in U$, alors $f+g$ et λg le sont (pour $\lambda \in \mathbb{R}$) et $d(f+g)(a) = df(a) + dg(a)$, $d(\lambda f)(a) = \lambda df(a)$.

PROP 8 : Si $f : U \to V$ et $g : V \subset F \to G$ sont composables et différentiables en a et $f(a)$ resp., alors $g \circ f$ l'est et $d(g\circ f)(a) = dg(f(a)) \circ df(a)$.

THM 9 : (Inégalité des accroissements finis)
Soit $(a,b) \in U^2$ tel que $[a;b] = \{ta + (1-t)b \mid t \in [0;1]\} \subset U$.
On suppose f continue sur $[a;b]$, différentiable sur $]a;b[$ et : $\exists M > 0, \forall c \in U, \|df(c)\| < M$, alors :
$\|f(b) - f(a)\| \leq M\|b-a\|$

REM 10 : Les théorèmes de Rolle et des accroissements finis sont faux dès que $\dim(F) \geq 2$: $f : \begin{array}{l} [0;2\pi] \to \mathbb{C} \\ t \mapsto e^{it} \end{array}$ vérifie $f(0) = f(2\pi)$ mais $f'(t) \neq 0$ $\forall t \in [0;2\pi]$.

COR 11 : Si U est connexe et pour tout $x \in U$, $df(x) = 0$, alors f est constante sur U.

THM 12 : Soit $f_k : U \to F$ une suite d'applications telle que :
• (f_k) converge simplement sur U
• $(df_k(x))_k$ converge uniformément sur $\mathcal{L}_c(E,F)$ pour $x \in U$.
Alors $\lim_{k\to\infty} f_k$ est différentiable et $d(\lim_{k\to\infty} f_k) = \lim_{k\to\infty} df_k$ [RoD] 117

DEF 13 : On suppose E euclidien et $f : U \subset E \to \mathbb{R}$ différentiable en $a \in U$. Alors $df(a) \in E^*$ donc il existe un unique vecteur $v \in E$ tel que $\forall h \in E$, $df(a)(h) = \langle v | h \rangle$. Ce vecteur v est appelé gradient de f en a noté $\nabla f(a)$ ou $\mathrm{grad}\, f(a)$

REM 14 : Le vecteur $\mathrm{grad}\, f(a)$ donne la direction de la plus grande pente de f en a et sa direction est orthogonale aux courbes de niveau.

[GOU] 2) Dérivées directionnelles et dérivées partielles

DEF 15 : Soient $f : U \subset E \to F$, $a \in U$, $v \in E \setminus \{0\}$. On dit que f est dérivable en a suivant v lorsque $\varphi : t \mapsto f(a+tv)$ est dérivable en $t=0$. On note alors :
$$D_v f(a) = \lim_{\substack{t\to 0 \\ t \neq 0}} \frac{1}{t}\left(f(a+tv) - f(a)\right)$$

PROP 16 : Si f est différentiable en $a \in U$, alors f est dérivable en a suivant tout vecteur $v \neq 0_E$ et $D_v f(a) = df(a)(v)$.

REM 17 : La réciproque est fausse, en effet : $f : \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto \begin{cases} \frac{y}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{array}$ est dérivable selon tout vecteur en $(0,0)$ mais n'est pas continue en $(0,0)$.

Dans la suite, $E = \mathbb{R}^n$ et $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de $\mathbb{R}^n$.

DEF 18 : Soit $i \in [\![1;n]\!]$. On dit que f admet une dérivée partielle en a d'indice i lorsque f est dérivable en a suivant le vecteur e_i et on note $D_{e_i} f(a) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$.

PROP 19 : Soit $v = \sum_{j=1}^{n} v_j e_j \in E \setminus \{0_E\}$. Si f est différentiable en a, alors $df(a)(v) = \sum_{j=1}^{n} v_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)$. De plus, si $f : U \to \mathbb{R}$, alors $\nabla f(a) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) e_i$

DEF 20 : Soit $f : U \to \mathbb{R}^p$ différentiable en a. On définit la matrice jacobienne de f en a par :
$$\mathrm{Jac}(f)(a) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_{\substack{1\leq i\leq p \\ 1\leq j\leq n}} \text{ avec } f = (f_1, \dots, f_p).$$

REM 21: $Jac(f)(a)$ est la matrice de $df(a)$ dans les bases de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^p$.

PROP 22: Soient f, g composables, f différentiable en a, g différentiable en $f(a)$, alors $Jac(g \circ f)(a) = Jac(g)(f(a)) Jac(f)(a)$

PROP 23 (Formule de la chaîne): Avec les mêmes hypothèses
$\forall j \in [\![1;n]\!]$, $\dfrac{\partial (g \circ f)}{\partial x_j}(a) = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} \partial_j f_k(a) \, \partial_k g(f(a))$.

THM 24: Soit $f: U \to F$. Si toutes les dérivées partielles de f sur U existent et sont continues en $a \in U$, alors f est différentiable en a et $df(a) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) e_i^*$.

REM 25: La réciproque est fausse. $f: \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} x^2 \sin(\frac{1}{x}) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{array}$
est différentiable en 0 mais f' n'est pas continue en 0.

THM 26: Soit $f: U \to F$. f est de classe $\mathcal{C}^1$ si et seulement si toutes dérivées partielles existent et sont continues sur U.

3) Différentielle d'ordre supérieur [ROU] [GOU]

DEF 27: Soit $f: U \to F$, $a \in U$. On dit que f est deux fois différentiable en a lorsque f est différentiable sur U et $df: U \to \mathcal{L}_c(E, F)$ est différentiable en a. On note $d^2f(a) = d(df)(a) \in \mathcal{L}_c(E, \mathcal{L}_c(E, F))$.
Par récurrence, on dit que f est k fois différentiable en a ($k \geq 2$) lorsque df est différentiable $k-1$ fois en a.

REM 28: Soient $i, j \in [\![1;n]\!]$. On note $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ la dérivée partielle de $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ selon e_j.

DEF 29: On dit que $f: U \to F$ est de classe $\mathcal{C}^p$ lorsque toutes les dérivées partielles jusqu'à l'ordre p existent et sont continues sur U.

THM 30: (Schwarz) Soit $f: U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, U ouvert non vide, telle que f soit deux fois différentiable en $a \in U$.
Alors $\forall i, j \in [\![1;n]\!]$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a)$

COR 31: Si f est de classe $\mathcal{C}^p$, alors les dérivées partielles jusqu'à l'ordre p ne dépendent pas de l'ordre de dérivation.

EX 32: Soit $f: \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto \begin{cases} xy \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{array}$
Alors $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$ existent et sont différentes.

REM 33: L'espace $\mathcal{L}_c(E, \mathcal{L}_c(E, F))$ s'identifie à l'espace $\mathcal{L}_c(E \times E, F)$ donc on note $d^2 f(a)(h)(k) = d f^2(a)(h, k)$.
Le théorème de Schwarz entraîne : $d^2 f(a)(k, h) = d^2 f(a)(h, k)$

DEF 34: On suppose f deux fois différentiable en a et $F = \mathbb{R}$. On définit la matrice Hessienne de f en a par :
$$H_f(a) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) \right)_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

REM 35: Cette matrice est symétrique !

DEF 36: Soit $f: U \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$. On définit le laplacien de f par : $\Delta f = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$.

EX 37: Soit $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ et $\varphi: \begin{array}{l} \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \\ (r, \theta) \mapsto (r\cos(\theta), r\sin(\theta)) \end{array}$
Soit $F = f \circ \varphi$. Alors $\Delta f = \dfrac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r} \dfrac{\partial F}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2} \dfrac{\partial^2 F}{\partial \theta^2}$.

II - Théorèmes fondamentaux

1) Théorèmes d'inversion [GOU] DEV 1

THM 38 (Inversion locale) : Soient E, F deux espaces de Banach, $U \subset E$ un ouvert et $f: U \to F$ de classe $\mathcal{C}^1$. Soit $x_0 \in U$ tel que $df(a)$ soit un homéomorphisme. Alors il existe V un voisinage ouvert de a, W un voisinage ouvert de $f(a)$ tels que :
- $f: V \to W$ est une bijection de V sur W
- L'application inverse $g: W \to V$ est continue
- g est de classe $\mathcal{C}^1$ et pour tout $x \in W$, $dg(f(x)) = df(x)^{-1}$

COR 39: Avec les mêmes notations, si $f: U \to F$ est de classe $\mathcal{C}^1$ telle que pour tout $x \in U$, $df(x)$ est inversible bicontinue Alors f est une application ouverte

COR 40 (Inversion globale) : Avec les mêmes notations, $f: U \to F$ de classe $\mathcal{C}^1$ injective. Alors
(i) $\forall x \in U$, $df(x)$ est inversible bicontinue $\Leftrightarrow$ $V = f(U)$ est un ouvert de F et $f^{-1}: V \to U$ est de classe $\mathcal{C}^1$.

DEF 41: Soient U, V deux ouverts de $\mathbb{R}^n$ et $f: U \to V$. On dit que f est un $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme ($k \geq 1$) lorsque f est bijective de classe $\mathcal{C}^k$ et que f^{-1} est de classe $\mathcal{C}^k$.

EX 42: Soit $f: \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}^2 \\ (x,y) \mapsto (x^2 - y^2, 2xy) \end{array}$
Alors f est $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme local en tout point de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ mais n'est pas un $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme global.

2) Théorème des fonctions implicites [Rou] [Gou]

THM 43 - (Fonctions implicites) Soient $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ et $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^p$ de classe $\mathcal{C}^1$. Soit $(a,b) \in \mathcal{U}$ tel que $f(a,b) = 0$ et que la matrice jacobienne $Jac_y f(a,b)$ formée des dérivées partielles de f par rapport à y en (a,b) soit inversible. Alors :

- Il existe V un voisinage ouvert de a dans $\mathbb{R}^n$
- Il existe W un voisinage ouvert de b dans $\mathbb{R}^p$

tels que $V \times W \subset \mathcal{U}$.

- Il existe $\varphi : V \to W$ de classe $\mathcal{C}^1$, unique, telle que $(x \in V, y \in W$ et $f(x,y) = 0) \Leftrightarrow (x \in V$ et $y = \varphi(x))$

De plus, $Jac_y f(x,y)$ est inversible et $d\varphi(x) = -(d_y f(x,\varphi(x)))^{-1} \circ d_x f(x,\varphi(x))$

EX 44 : Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto \sin(y) + xy^4 + x^2$. Il existe deux voisinages ouverts U et V de 0 dans $\mathbb{R}$ et une fonction $\varphi : U \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ telle que pour tout $x \in U$, $f(x,y) = 0 \Leftrightarrow y = \varphi(x) \in V$.

3) Extrema [Gou]

On suppose que $F = \mathbb{R}$ et $\mathcal{U}$ est un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$.

PROP 45 : Si $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ admet un extremum relatif en un point $a \in \mathcal{U}$ et si f est différentiable en a, alors $df(a) = 0$ (i.e $\nabla f(a) = 0$). Un tel point est appelé point critique de f.

EX 46 : La réciproque est fausse, $x \mapsto x^3$ admet un point critique en 0 mais 0 n'est pas un extremum local.

THM 47 : Soit $f : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ et soit $a \in \mathcal{U}$ tel que $df(a) = 0$

(i) Si f admet un minimum (resp. maximum) relatif en a, $H_f(a)$ est positive (resp. négative)

(ii) Si $H_f(a)$ est définie positive (resp. définie négative), f admet un minimum (resp. maximum) relatif en a.

THM 48 (Extrema liés) : Soient $f, g_1, \dots, g_r : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. Soit $\Gamma = \{x \in \mathcal{U} \,/\, g_1(x) = \dots = g_r(x) = 0\}$. Si $f_{|\Gamma}$ admet un extremum relatif en $a \in \Gamma$ et si les formes linéaires $dg_1(a), \dots, dg_r(a)$ sont linéairement indépendantes, alors il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ des réels tels que $df(a) = \lambda_1 dg_1(a) + \dots + \lambda_r dg_r(a)$

REM 49 : Les λ_i sont uniques et sont appelés multiplicateurs de Lagrange.

REM 50 : On peut retrouver l'inégalité arithmético-géométrique grâce à ce théorème.

III - Exemples et applications

1) Calcul différentiel dans les espaces de matrices [Gou] DEV2

EX 51 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. L'application $\det : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $M \mapsto \det(M)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\forall H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,
$$d(\det)(M)(H) = tr({}^t com(M) H)$$

PROP 52 : On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de la norme $\|M\|_2 = \left(\sum_{i,j} m_{i,j}^2\right)^{\frac{1}{2}}$. Le groupe $SO_n(\mathbb{R})$ des matrices orthogonales directes est l'ensemble des éléments de $SL_n(\mathbb{R})$ de norme minimale.

THM 53 : La fonction $\exp : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to GL_n(\mathbb{R})$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\forall H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $d\exp(M)(H) = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p!}\left(\sum_{i=0}^{p-1} M^i H M^{p-1-i}\right)$

. La fonction exp est un difféomorphisme local d'un voisinage de 0 sur un voisinage de I_n.

2) Quelques propriétés sur les fonctions holomorphes et harmoniques

THM 54 : Soit $\mathcal{U} \subset \mathbb{C}$ un ouvert non vide et $f : \mathcal{U} \to \mathbb{C}$. Soit $\tilde{\mathcal{U}} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x+iy \in \mathcal{U}\}$ et $F : \tilde{\mathcal{U}} \to \mathbb{R}^2$, $(x,y) \mapsto (u(x,y), v(x,y)) = (\mathrm{Re}(f(x+iy)), \mathrm{Im}(f(x+iy)))$ [Gou]

Alors f est holomorphe $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) \end{cases}$ $\forall x,y \in \tilde{\mathcal{U}}$.

$Jac(F)$ est la matrice d'une similitude plane directe.

DEF 55 : Soit $f : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$. On dit que f est harmonique lorsque $\Delta f = 0$.

PROP 56 : Soit $u : B(0,1) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2+y^2 < 1\} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ et harmonique. Alors $\frac{\partial u}{\partial x}$ est la partie réelle d'une fonction holomorphe et de même pour u.

THM 57 : Soit $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ harmonique sur la boule unité ouverte B de $\mathbb{R}^m$. Alors : $\forall x \in B$, $\min_{\|y\|=1} f(y) \leq f(x) \leq \max_{\|y\|=1} f(y)$

3) Applications aux intégrales [Li intégration]

THM 58 : Soient U et V deux ouverts de $\mathbb{R}^m$ et $\varphi : U \to V$ un difféomorphisme de classe $\mathcal{C}^1$. Alors pour tout $f : V \to \mathbb{R}^+$ mesurable, on a :
$$\int_V f(t)\, d\lambda_N(t) = \int_U f(\varphi(x))\, |J_\varphi(x)|\, d\lambda_N(x) \quad (*)$$
De plus, si $f : V \to \mathbb{R}$, alors f est intégrable sur V si et seulement si $(f \circ \varphi)|J_\varphi|$ est intégrable sur U et dans ce cas $(*)$ est vraie. J_φ désigne le Jacobien de φ en x i.e $\det(Jac(\varphi)(x))$.

EX 59 : Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ intégrable. Alors :
$$\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\, dx\, dy = \iint_{r>0,\, 0<\theta<2\pi} f(r\cos(\theta), r\sin(\theta))\, r\, dr\, d\theta$$

EX 60 : On peut calculer l'intégrale de Gauss $\int_{\mathbb{R}} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$, $a > 0$.